

非线性时谐电磁场电路耦合的高速实心转子感应电机 电磁场有限元建模和分析

狄冲, 王俊豪, 李荣泽, 鲍晓华

(合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要:针对高速实心转子感应电机二维电磁场高精度快速建模问题,提出考虑材料非线性特性的二维电磁场电路耦合的快速有限元分析建模方法。首先,详细推导了高速实心转子感应电机不同物理域中的电磁场扩散方程,在单元分析中依据伽辽金法将扩散方程转换为线性方程组,并给出了场路耦合有限元计算过程中单元刚度矩阵、质量矩阵和载荷向量的详细计算方法;在时谐场下,根据磁场能量等效原理,对电机定转子中所涉及的非线性材料进行正弦化处理,以提高电机电磁性能的计算精度;结合牛顿拉夫逊迭代法,将时谐场下的复数方程组转换为实数方程,详细推导了待求解方程组的牛顿拉夫逊迭代格式,并给出了其雅各比矩阵的具体形式,实现了考虑材料非线性特性的场路耦合时谐场快速求解;最后,开发了适用于高速实心转子感应电机的场路耦合专用求解计算程序库,并以此为基础对一台高速实心转子感应电机的电磁性能进行了系统化分析建模,验证了算法的准确性和可靠性。

关键词:高速实心转子感应电机;时谐场;有限元;场路耦合;非线性

DOI:10.15938/j.emc.2025.11.008

中图分类号:TM341

文献标志码:A

文章编号:1007-449X(2025)11-0077-11

Modelling and analysis of high-speed solid-rotor induction machine by nonlinear time harmonic field electric circuit coupled finite element analysis

DI Chong, WANG Junhao, LI Rongze, BAO Xiaohua

(School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A high-precision and rapid 2D electromagnetic field modeling method considering material non-linearity characteristics through field-circuit coupled finite element analysis was proposed for high-speed solid-rotor induction motors. Firstly, the electromagnetic field diffusion equations in different physical domains of the motor were systematically derived. The Galerkin method was employed to transform these diffusion equations into linear equation systems by element analysis, with detailed computational methods explicitly provided for element stiffness matrices, mass matrices, and load vectors in the field-circuit coupled finite element calculation process. For time-harmonic field analysis, sinusoidal processing of nonlinear materials in stator and rotor was implemented based on magnetic energy equivalence principle to enhance computational accuracy of electromagnetic performance. By combining Newton-Raphson iteration

收稿日期: 2025-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(52407045);安徽省高校协同创新项目(GXXT-2023-008)

作者简介: 狄冲(1991—),男,博士,研究方向为电机电磁场有限元建模、高速电机设计;

王俊豪(2000—),男,硕士研究生,研究方向为高速实心转子感应电机设计、电机电磁场分析;

李荣泽(2001—),男,硕士研究生,研究方向为调速永磁电机设计、电机磁网络建模;

鲍晓华(1972—),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为大型潜水电机设计、电机电磁分析。

通信作者: 狄冲

method, complex equation systems in time-harmonic field were transformed into real-number equations. The Newton-Raphson iterative scheme for solving equations was thoroughly derived, including explicit formulation of its Jacobian matrix, thereby realizing rapid solution of field-circuit coupled time-harmonic field considering material nonlinearity. Finally, a dedicated solver library for field-circuit coupled analysis of high-speed solid rotor induction motors was developed. Systematic electromagnetic performance analysis and modeling were conducted on a prototype motor using this library, effectively validating the accuracy and reliability of the proposed algorithm.

Keywords: high-speed solid-rotor induction machine; time harmonic field; finite element analysis; field-circuit coupled; nonlinearity

0 引言

高速实心转子感应电机凭借其成本低廉、加工制造方便、起动转矩大和机械强度好的特点,备受高速压缩机、飞轮储能和航空航天等领域的青睐^[1-5]。高速实心转子感应电机的转子由实心钢构成,其兼具导电和导磁特性。该特性使得高速实心转子感应电机的电磁场建模面临新的挑战,即需要对转子区域的感应涡流和磁场分布同时进行分析建模。

高速实心转子感应电机的电磁建模主要涉及有限元法和解析法,其中解析法具有计算速度快的优点,而有限元法则具有计算精度高的优势^[6-8]。在解析计算方面,文献[9]基于子域法对一台实心转子感应电机建立了磁准静态场解析计算模型,利用该模型准确计算了实心转子感应电机的运行电感,并和二维有限元计算结果进行了详细对比,验证了所提出模型的准确性。文献[10]则针对一台笼型实心转子感应电机,建立了考虑磁场饱和效应的二维多层电磁场解析模型,该模型将实心转子区域分为多层,每一层相对磁导率视为均匀分布,能够有效计算在不同透入深度下的转子涡流分布。然而,上述解析模型普遍存在忽略材料非线性特性和定子开槽影响的问题。为了解决上述问题,文献[11]则提出一种考虑材料非线性特性的实心转子二维解析模型,然而该模型无法准确考虑定子开槽的影响。

在高速实心转子感应电机的有限元建模层面,学术界和工业界通常采用场路耦合瞬态有限元分析计算方法对其进行电磁分析,然而该方法具有收敛速度慢和仿真计算时间长的缺点^[12-14]。针对电机电磁场电路耦合瞬态有限元分析计算过程中电磁暂态时间过长的问题,文献[15-16]指出电机有限元仿真计算处于暂态过程时,三相磁链或者电流将处

于不对称状态,其中直流分量是阻碍电磁暂态快速达到稳态的主要原因。因此,在有限元计算过程中通过改变激励消除暂态过程中的直流磁链和直流电流可以实现暂态过程的快速收敛。然而,该方法不适用于涉及感应涡流效应的高速实心转子感应电机的建模仿真。文献[17]研究表明高速实心转子感应电机电磁暂态可以认为是由定子回路电磁暂态和转子回路电磁暂态共同引起。该文献通过采用堵转转子的方法消除转子电磁时间常数,并通过配置可切换电流/电压源的方法消除定子回路电磁时间常数,待感应电机达到稳态后再将堵转转转子切换为旋转转子。可见,上述方法的施行需要采用其他分析技术获取电机稳态电流作为初始电流激励,并且初始电流误差会影响电机达到稳态的仿真周期。

文献[18-19]表明,可以采用场路耦合时谐场加速瞬态场的有限元仿真技术手段,即忽略谐波的影响,首先在时谐场中进行仿真,获得绕组电压、绕组电流和感应涡流分布等电机电磁特性,并将这些电磁特性作为后续瞬态场计算的初始条件。然而,时谐场所建立的电磁初始条件和瞬态场所获得的稳态电磁状态具有一定的出入。此外,由于实心转子阻尼效应较强,其所对应的转子电磁时间常数较大,导致后续达到稳态仍需要消耗大量的仿真周期。因此,为了解决上述问题,有必要针对高速实心转子感应电机快速电磁建模的迫切需求开发时谐场电路耦合,并且考虑材料非线性的专用电磁场有限元求解器,以满足实心转子感应电机快速电磁设计和加速瞬态场求解计算的迫切需求。

本文以二维电磁场有限元分析方法为基础,建立考虑材料非线性特性的高精度场路耦合的高速实心转子感应电机的时谐场专用求解器;基于伽辽金法将电磁场和电路耦合的二维电磁场扩散方程转换

为线性方程组进行求解;为了在时谐场下精确考虑材料非线性的影响,基于磁场能量等效原理,提出 2 种非线性材料正弦化处理方法;同时,依据复数牛顿拉夫逊迭代方法,详细推导其迭代格式,并以此实现非线性时谐场求解器的快速收敛;最后,开发适用于高速实心转子感应电机电磁场电路耦合的时谐场快速计算求解库,以此为基础对一台高速实心转子感应电机的电磁性能进行系统化分析建模。

1 场路耦合时谐场有限元建模

图 1 显示了一台高速实心转子感应电机的场路耦合有限元模型原理图,该原理图共包括定子和转子 2 个回路,在定子回路中 U_A 、 U_B 和 U_C 为三相电源电压, R_s 和 L_e 为定子绕组相电阻和端部漏感, I_A 、 I_B 和 I_C 则为三相定子电流, E_A 、 E_B 和 E_C 则为三相定子绕组反感应电动势。从图 1(a) 可以看出,在定子回路中,磁场和电路是通过定子绕组中的磁链和反电动势进行相互耦合。在转子回路中,由于实心转子感应电机的转子由一整块实心钢制成,且在实际工程中实心转子两端为悬空,实心转子仅由感应电动势进行供电产生涡流并在转子导体内部闭合。因此在电路层面,如图 1(b) 所示,转子回路可以视为转子导体和一个无穷大电阻 R_{inf} (可取 $10^7 \Omega$) 串联,其中流过转子实心导体的总电流 I_R 约为 0。

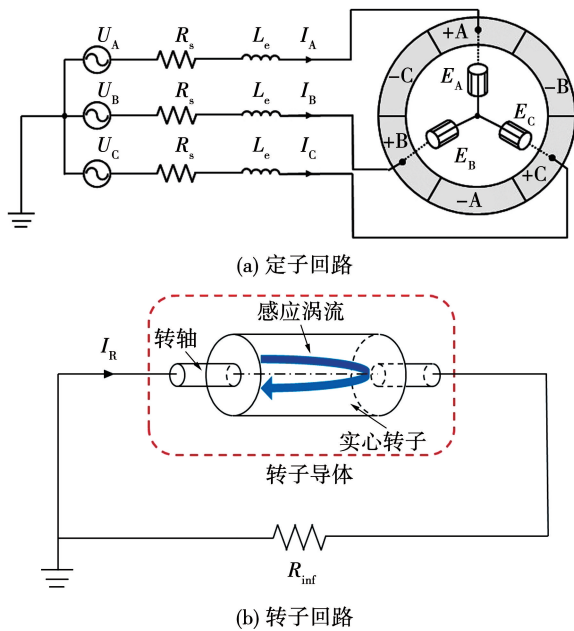


图 1 实心转子感应电机场路耦合有限元模型原理图

Fig. 1 Schematic diagram of field-circuit coupled finite element model of the solid-rotor induction machine

高速实心转子感应电机有限元模型主要涉及定子铁心、定子绕组、气隙和实心转子等物理域,其二维电磁场控制方程^[20]为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \frac{U}{l} - \mathbf{J}. \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}$ 为磁矢位; ν 为材料磁阻率; U 为实心导体两端的电压降(例如实心转子区域); $\mathbf{J}$ 为定子绕组区域内的电密; σ 为实心转子材料的电导率; l 为电机轴长; ω 为电源的电角频率。

1.1 定子铁心和气隙域方程

定子铁心和气隙区域具有导磁不导电的特性,因此控制方程式(1)可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = 0. \quad (2)$$

采用一阶三角形单元剖分,对整个实心转子感应电机物理面进行空间离散,再结合伽辽金法,用形函数代替权函数,可以在单元分析中,将控制方程式(2)转换为

$$[\mathbf{S}_e]_{3 \times 3} [\mathbf{A}_e]_{3 \times 1} = 0. \quad (3)$$

式中 $\mathbf{S}_e$ 为单元刚度矩阵,可以表示为

$$\mathbf{S}_e = \frac{\nu_e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中: Δ 为三角形单元的面积; b 和 c 为三角形单元顶点坐标决定的系数;角标 i 、 j 和 k 为逆时针旋转三角形单元的 3 个顶点;角标 e 代表单元中对应的物理量。

1.2 定子绕组域方程

从图 1(a) 可以看出,定子绕组区域内的磁场与电路通过线圈原件进行耦合,因此定子绕组同时涉及磁场扩散方程和电路方程。从电机磁场角度上来看,定子绕组存在导电和导磁特性,但不涉及感应涡流的计算,因此控制方程式(1)可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = -\mathbf{J}. \quad (5)$$

采用伽辽金法,在单元分析中,控制方程式(5)可以转换为

$$[\mathbf{S}_e]_{3 \times 3} [\mathbf{A}_e]_{3 \times 1} = [\mathbf{T}_e]_{3 \times 1}. \quad (6)$$

式中 $\mathbf{T}_e$ 为单元载荷向量,可以表示为

$$\mathbf{T}_e = \frac{J_e \Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

在式(7)中,定子绕组区域的单元电密可由耦

合电路的三相电流求得,可以表示为

$$J_e = \frac{N_l}{aS_c} (\alpha_A I_A + \alpha_B I_B + \alpha_C I_C) \quad (8)$$

式中: N_l 为线圈匝数; a 为并联支路数; S_c 为导线截面积; α_A 、 α_B 和 α_C 为电流系数; 以 α_A 为例, 电流系数具体形式为:

$$\alpha_A = \begin{cases} 1, & \text{单元属于 A 相;} \\ -1, & \text{单元属于 -A 相;} \\ 0, & \text{单元不属于 } \pm A \text{ 相。} \end{cases} \quad (9)$$

在电路层面, 以 A 相为例, 绕组元件中的反感应电动势 e_A 可由单元磁矢位推导出, 即

$$E_A = -j\omega \left(\frac{N_l p}{aS_c} \sum_N \alpha_A \Delta_e \frac{A_{e,i} + A_{e,j} + A_{e,k}}{3} \right) \quad (10)$$

式中 N 为所涉及物理面域中三角形单元个数。

根据图 1(a) 中的定子回路, 结合式 (10) 由有限元计算所得的反感应电动势, 可得到电磁耦合方程的最终形式, 以 A 相为例, 可以具体表示为

$$U_A = j\omega \left(\frac{N_l p}{aS_c} \sum_N \frac{A_{e,i} + A_{e,j} + A_{e,k}}{3} \frac{2\alpha_A - \alpha_B - \alpha_C}{3} \Delta_e \right) + R_S I_A + j\omega L_e I_A \quad (11)$$

式中 p 为极对数。

1.3 实心转子域方程

从图 1(b) 可以看出, 电机转子区域磁场与电路的耦合部件为整个实心转子导体, 该区域存在导电和导磁特性, 同时涉及感应涡流的计算, 因此控制方程式 (1) 可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = j\omega \sigma \mathbf{A} - \sigma \frac{U}{l} \quad (12)$$

采用伽辽金法, 在单元分析中, 控制方程式 (12) 可以转换为

$$[\mathbf{S}_e]_{3 \times 3} [\mathbf{A}_e]_{3 \times 1} + j\omega [\mathbf{M}_e]_{3 \times 3} [\mathbf{A}_e]_{3 \times 1} = [\mathbf{T}_e]_{3 \times 1} \quad (13)$$

式中 $\mathbf{M}_e$ 为单元质量矩阵, 可以表示为

$$\mathbf{M}_e = \frac{\Delta \sigma}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

图 1(b) 中流过实心转子导体的总电流 I_R 可由转子区域内电密积分得到, 将积分形式转换成单元电密求和可得

$$U_R = - \sum_N \frac{U_R}{l} \sigma \Delta_e + j\omega \sum_N \frac{A_{e,i} + A_{e,j} + A_{e,k}}{3} \sigma \Delta_e \quad (15)$$

式中 U_R 为转子导体两端电压。在电路层面, 如

图 1(b) 所示, 转子导体两端电压可由转子回路电压平衡方程导出, 具体可以写为

$$U_R = R_{inf} I_R \quad (16)$$

1.4 系统总体方程

将高速实心转子感应电机所有物理域的磁场和电路方程进行整体组装, 即可得到考虑电磁场和电路耦合的整体方程组, 其矩阵形式可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{C}_{Si} & \mathbf{C}_{Ru} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma \mathbf{S}_R}{l} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -R_{inf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_S \\ U_R \\ I_R \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{Su} & \mathbf{L}_e & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{Ru} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_S \\ U_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{U}_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中: 节点磁矢位向量 $\mathbf{A}$ 、定子电流 $\mathbf{I}_S$ 、转子压降 U_R 和转子电流 I_R 均为未知量; $\mathbf{U}_S$ 为定子侧三相电压列向量; $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{M}$ 为维度 $N \times N$ 的总体刚度矩阵和总体质量矩阵 (N 为剖分节点总数), 可由式 (6) 中的单元刚度矩阵 $\mathbf{S}_e$ 和式 (14) 中的单元质量矩阵 $\mathbf{M}_e$ 按节点编号地址累加组装而成; $\mathbf{C}_{Si}$ 为维度 $N \times 3$ 定子电流系数矩阵, 可由式 (8) 进一步导出; $\mathbf{C}_{Ru}$ 为维度 $N \times 1$ 的转子电压系数矩阵, 可由式 (15) 中右端第二项导出; $\mathbf{D}_{Su}$ 为维度 $3 \times N$ 的定子电压系数矩阵, 可由式 (11) 右侧第一项导出; $\mathbf{D}_{Ru}$ 为维度 $1 \times N$ 的转子电流系数矩阵, 可由式 (16) 导出; $\mathbf{R}_S$ 和 $\mathbf{L}_e$ 分别为定子相电阻和绕组端部漏感的矩阵表示形式, 均为维度 3×3 的将电阻和电感置于矩阵对角位置的对角矩阵。此外, 式 (17) 中第一行为电磁场方程; 第二行为定子绕组电压方程; 第三行和第四行分别为转子回路电流和电压方程。

2 时谐场非线性迭代

2.1 材料 BH 曲线的正弦化等效

在时谐场计算过程中, 电磁场以一定频率随时间正弦变化, 因此, 其输入和响应原则上随时间的变化函数也需要呈正弦形式。对于电机中所涉及的非线性 BH 曲线而言, 在非线性的迭代过程中, 电压源供电输入应为正弦变化的 B (电流源则为正弦变化的 H), 其响应应为正弦变化的 H (电流源则为正弦变化的 B)。因此, 有必要对非线性的 BH 曲线进行正弦化等效。

值得注意的是对 BH 曲线的正弦化等效,并非指对 BH 相互响应直接正弦化处理,强制直接正弦化 BH 曲线只会将 BH 之间的映射函数矫正为一次函数。因此,正确的矫正原则为利用 BH 曲线上某一个工作点计算出一个电周期内的磁能或者磁共能,并依据输入的假设正弦的 B 或者 H ,反解出其等效的正弦化的 H_{eq} 或者 B_{eq} 。上述根据磁场能量等效原理,所求得的正弦化 H_{eq} 或者 B_{eq} 可以表述为:

$$\left. \begin{aligned} H_{eq} &= \frac{1}{\pi f B} \int_0^{2\pi f} \int_0^B H dB dt; \\ B_{eq} &= \frac{1}{\pi f H} \int_0^{2\pi f} \int_0^H H dB dt. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中 f 为供电频率。

依据式(18)中的计算逻辑,以 M50W600 为例,如图 2 所示,可以得到采用不同等效逻辑所得到的正弦化处理的 BH 曲线。图中采用两种等效逻辑,在曲线的饱和区域的磁密都有所抬升;其中正弦 B -等效 H 的曲线相较于其他曲线,其磁场强度 H 变化范围较窄,这是因为该曲线 B 为输入参数(B 最大约为 1.87 T),等效 H 为输出参数,在实际非线性迭代过程中,曲线以外的区域可以采用线性外部插值进行处理。

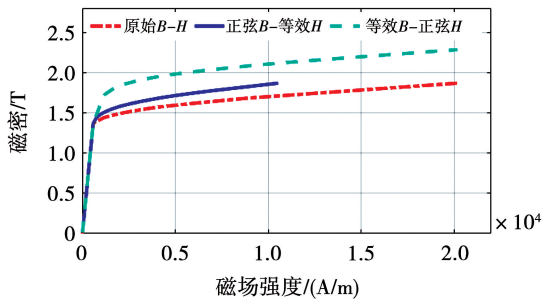


图 2 M50W600 正弦化处理的 BH 曲线

Fig. 2 Equivalent BH curves of M50W600 by different sinusoidal treatment

2.2 复数牛顿拉夫逊迭代

在时谐场求解过程中所涉及物理量以一定频率按正弦变化,在求解过程中所有物理量可用复数表示,因此待求解方程组式(17)为复数方程组。在考虑材料非线性特性的求解过程中,为了加快迭代收敛速度,可采用牛顿拉夫逊法,然而传统牛顿拉夫逊迭代法只适用于实数方程。为了解决非线性复数方程组的迭代问题,可将复数方程组式(17)中所涉及物理量的实部和虚部分开,转换为实数方程组^[21],即

$$\begin{bmatrix} S & C_{Si} & C_{Ru} & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma S_R}{l} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -R_{inf} \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ D_{Su} & L_e & 0 & 0 \\ D_{Ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S & C_{Si} & C_{Ru} & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma S_R}{l} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -R_{inf} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ D_{Su} & L_e & 0 & 0 \\ D_{Ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \omega \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ D_{Su} & L_e & 0 & 0 \\ D_{Ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{Re} \\ I_S^{Re} \\ U_R^{Re} \\ I_R^{Re} \\ A^{Im} \\ I_S^{Im} \\ U_R^{Im} \\ I_R^{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_S^{Re} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_S^{Im} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中角标 Re 和 Im 代表相应物理量的实部和虚部。

将式(19)进一步修改为考虑材料非线性特性的牛顿拉夫逊迭代格式,第 $k+1$ 步的迭代格式可以具体表示为

$$\begin{bmatrix} A^{Re} \\ I_S^{Re} \\ U_R^{Re} \\ I_R^{Re} \\ A^{Im} \\ I_S^{Im} \\ U_R^{Im} \\ I_R^{Im} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} A^{Re} \\ I_S^{Re} \\ U_R^{Re} \\ I_R^{Re} \\ A^{Im} \\ I_S^{Im} \\ U_R^{Im} \\ I_R^{Im} \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} J^{RR} & C_{Si} & C_{Ru} & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma S_R}{l} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -R_{inf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{RI} - \omega M & 0 & 0 & 0 \\ -\omega D_{Su} & -\omega L_e & 0 & 0 \\ -\omega D_{Ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times R_0 \quad (20)$$

式中: $\mathbf{R}$ 为残差向量; $\mathbf{J}^{\text{RR}}$ 、 $\mathbf{J}^{\text{RI}}$ 、 $\mathbf{J}^{\text{IR}}$ 和 $\mathbf{J}^{\text{II}}$ 为雅各比矩阵, 在单元 Ω 内相应矩阵的矩阵元素可以表示为:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_{ij}^{\text{RR}} &= \int \nabla \times N_i \cdot \left(\frac{\partial H^{\text{Re}}}{\partial B^{\text{Re}}} \cdot \nabla \times N_j \right) d\Omega; \\ \mathbf{J}_{ij}^{\text{RI}} &= \int \nabla \times N_i \cdot \left(\frac{\partial H^{\text{Re}}}{\partial B^{\text{Im}}} \cdot \nabla \times N_j \right) d\Omega; \\ \mathbf{J}_{ij}^{\text{IR}} &= \int \nabla \times N_i \cdot \left(\frac{\partial H^{\text{Im}}}{\partial B^{\text{Re}}} \cdot \nabla \times N_j \right) d\Omega; \\ \mathbf{J}_{ij}^{\text{II}} &= \int \nabla \times N_i \cdot \left(\frac{\partial H^{\text{Im}}}{\partial B^{\text{Im}}} \cdot \nabla \times N_j \right) d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中: N_i 和 N_j 为三角形单元中 i 和 j 节点的形函数; 复数 H 和复数 B 具有以下数学关系:

$$\left. \begin{aligned} H^{\text{Re}} &= \nu(B_x^{\text{Re}} + B_y^{\text{Re}}); \\ H^{\text{Im}} &= \nu(B_x^{\text{Im}} + B_y^{\text{Im}}); \\ B^2 &= (B_x^{\text{Re}})^2 + (B_y^{\text{Re}})^2 + (B_x^{\text{Im}})^2 + (B_y^{\text{Im}})^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中角标 x 和 y 分别代表相应物理量在 x 和 y 方向上的分量。根据式(22)可以得到^[22]:

$$\frac{\partial H^{\text{Re}}}{\partial B^{\text{Re}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x^{\text{Re}}}{\partial B_x^{\text{Re}}} & \frac{\partial H_x^{\text{Re}}}{\partial B_y^{\text{Re}}} \\ \frac{\partial H_y^{\text{Re}}}{\partial B_x^{\text{Re}}} & \frac{\partial H_y^{\text{Re}}}{\partial B_y^{\text{Re}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Re}} B_x^{\text{Re}} & 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Re}} B_y^{\text{Re}} \\ 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Re}} B_x^{\text{Re}} & \nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Re}} B_y^{\text{Re}} \end{bmatrix}; \quad (23)$$

$$\frac{\partial H^{\text{Re}}}{\partial B^{\text{Im}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x^{\text{Re}}}{\partial B_x^{\text{Im}}} & \frac{\partial H_x^{\text{Re}}}{\partial B_y^{\text{Im}}} \\ \frac{\partial H_y^{\text{Re}}}{\partial B_x^{\text{Im}}} & \frac{\partial H_y^{\text{Re}}}{\partial B_y^{\text{Im}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} & 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} \\ 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} & 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} \end{bmatrix} = \frac{\partial H^{\text{Im}}}{\partial B^{\text{Re}}}; \quad (24)$$

$$\frac{\partial H^{\text{Im}}}{\partial B^{\text{Im}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x^{\text{Im}}}{\partial B_x^{\text{Im}}} & \frac{\partial H_x^{\text{Im}}}{\partial B_y^{\text{Im}}} \\ \frac{\partial H_y^{\text{Im}}}{\partial B_x^{\text{Im}}} & \frac{\partial H_y^{\text{Im}}}{\partial B_y^{\text{Im}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_x^{\text{Im}} & 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_x^{\text{Im}} \\ 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_y^{\text{Im}} & \nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_y^{\text{Im}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

以节点 i 为例, 式(21)中的旋度项, 可以进一步表示为:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}; \\ \nabla \times N_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_i \\ -b_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

结合式(23)~式(25), 将式(26)代入式(21)中, 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij}^{\text{RR}} &= \frac{1}{4\Delta} \left[c_i c_j \left(\nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Re}} B_x^{\text{Re}} \right) - \right. \\ &\quad c_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Re}} B_y^{\text{Re}} \right) - b_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Re}} B_x^{\text{Re}} \right) + \\ &\quad \left. b_i b_j \left(\nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Re}} B_y^{\text{Re}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij}^{\text{RI}} &= \frac{1}{4\Delta} \left[c_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} \right) - \right. \\ &\quad c_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} \right) - b_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} \right) + \\ &\quad \left. b_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij}^{\text{IR}} &= \frac{1}{4\Delta} \left[c_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} \right) - \right. \\ &\quad c_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_x^{\text{Re}} \right) - b_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} \right) + \\ &\quad \left. b_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_y^{\text{Re}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ij}^{\text{II}} &= \frac{1}{4\Delta} \left[c_i c_j \left(\nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_x^{\text{Im}} \right) - \right. \\ &\quad c_i b_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_x^{\text{Im}} \right) - b_i c_j \left(2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_x^{\text{Im}} B_y^{\text{Im}} \right) + \\ &\quad \left. b_i b_j \left(\nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial B^2} B_y^{\text{Im}} B_y^{\text{Im}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

将式(27)~式(30)代入式(20)便能够得到复数牛顿拉夫逊迭代的最终格式。其中, 式(27)~式(30)中所涉及的偏微分 $\partial \nu / \partial B^2$ 项可由正弦化处理过的 BH 曲线插值得到。

3 场路耦合时谐场有限元求解

3.1 求解器构建和求解流程

根据上一章所述原理, 采用 Python 编程语言, 自主研发了适用于电机电磁场求解的二维计算库 cdfem。图3为基于 cdfem 电机电磁场求解流程, 共包含3部分: 前处理、求解和后处理。其中, 前处理

采用开源软件 Gmsh 构建电机几何和网格剖分文件,并经过 meshio 库转换为节点信息、单元构成、边界条件和几何面域等网格信息。

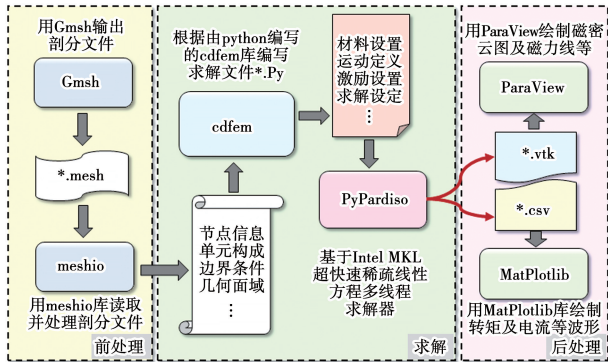


图 3 基于 cdfem 电机电磁场求解流程

Fig. 3 Electromagnetic field solving process of electrical machine solved by cdfem library

在求解环节,需要结合前一章的求解原理和 cdfem 库编写求解文件,求解文件主要涉及材料设置、运动定义、场路耦合配置和求解器设定等方面。对于非线性迭代求解则采用了上一章所述的复数牛顿拉夫逊迭代法,将非线性问题转换为线性方程组迭代求解;其中线性方程组求解则采用基于 Intel MKL 的快速稀疏线性多线程求解器 PyPardiso 进行并行求解。

在后处理环节,依据输出物理量类型,其中场量采用 vtk 格式储存,并采用开源软件 ParaView 进行可视化;标量则采用 csv 格式储存,可采用 Matplotlib 库进行可视化处理。

3.2 网格剖分

依据图 3 中的求解流程,结合时谐场求解器,能够快速高效实现高速实心转子感应电机的场路耦合有限元求解计算。图 4 为采用 Gmsh 构建的实心转子感应电机剖分图,该网格剖分涉及 8 594 个剖分节点和 17 154 个一阶三角形单元。

值得注意的是,采用 Gmsh 构建的网格并不涉及气隙网格,气隙网格由应用 Moving Band 动网格技术编写程序构建而成。且从图 4 中可以看出,气隙网格沿径向主要分成了两层,包括一层静止气隙和一层旋转滑动气隙。采用 Moving Band 动网格技术后,当转子旋转时,无需对整个电机进行重新剖分,只需要将气隙中的静止和旋转气隙中所涉及的两层三角形网格进行重新划分网格,从而节省了计算时间。

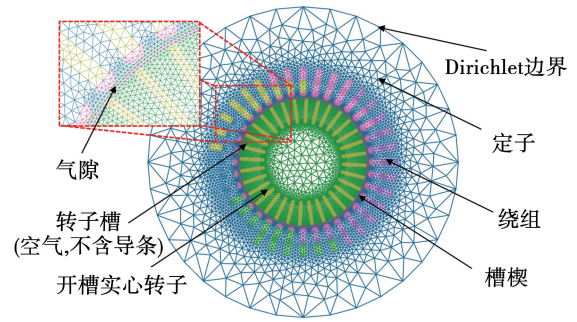


图 4 高速实心转子感应电机剖分图

Fig. 4 Mesh figure for high-speed solid-rotor induction machine

3.3 非线性迭代收敛性分析

如图 3 和 2.2 节所示,时谐场求解器采用了复数牛顿拉夫逊迭代法来考虑材料非线性问题。在非线性的迭代过程中,复数牛顿拉夫逊迭代法受磁导率的初始值影响较大,为了保证收敛性,磁导率的初始值可选用正弦化处理后的 BH 曲线上的初始磁导率,即 BH 曲线上第一个点与原点的斜率。

在时谐场迭代计算过程中,相对误差 ε 可由相邻两步磁矢位 A 之差的二范数计算得到,具体表示为

$$\varepsilon = \frac{\|A^k - A^{k-1}\|_2}{\|A^k\|_2} \quad (31)$$

图 5 显示了不同转差率下残差随迭代步数变化曲线,其中收敛准则为相对误差 $\varepsilon \leq 10^{-4}$ 。可以看出,在不同转差率下迭代都能够快速收敛,其中转差率 $s = 0.2$ 时,迭代步数为 9,收敛速度最快;转差率 $s = 1$ 时,迭代步数为 12,收敛速度最慢。

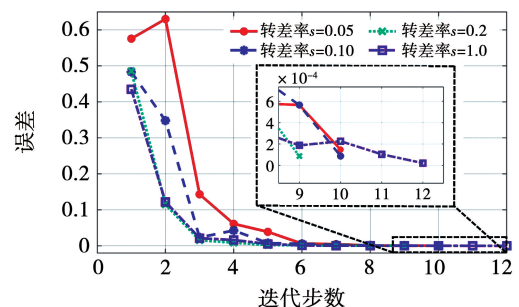


图 5 不同转差率下残差随迭代步数变化曲线

Fig. 5 Residual as function of number of iterations in different slip conditions

造成上述迭代步长不等的主要原因是:在不同工况下,磁场局部饱和程度不同,反映在 BH 曲线上则表现为工作点不同。具体表现为当转差率 $s = 1$

时,气隙电势急剧下降,电机整体饱和程度降低;但是堵转状态下电流相对较大,定转子局部饱和程度反而有所增加,对应的相对磁导率更接近饱和磁导率。而非线性迭代是由初始磁导率开始迭代,因此需要更多的迭代步数,才能达到 BH 曲线上饱和磁导率所在的工作点。

4 高速实心转子感应电机电磁性能计算

采用图3中所述的 cdfem 电机电磁场计算库中的时谐场求解器可以对高速实心转子感应电机进行快速电磁设计,主要尺寸参数和性能指标如表1所示。

表1 高速实心转子感应电机主要参数
Table 1 Main parameters of high-speed solid-rotor induction machine

参数	数值
额定功率 P_N/kW	1 000
额定转矩 $T_N/(\text{N} \cdot \text{m})$	800
额定电压 U_N/V	660
额定频率 f_N/Hz	200
绕组连接方式	三角形
极对数 p	1
定子槽数 Q_s	36
转子槽数 Q_r	32
定子外径 D_{se}/mm	560
定子内径 D_s/mm	240
气隙长度 δ/mm	5
定子叠片长度 l/mm	580
定子硅钢片牌号	M35W270
转子结构钢牌号	Q345

图6显示了采用 cdfem 电机电磁场计算库中的时谐场求解器所求解的额定工况下高速实心转子感应电机磁密分布。可以看出,磁密分布局部区域呈现出一定量的色块,造成该现象的原因是在计算过程中采用了一阶三角形单元,所计算的磁密为单元量,在单元内部为常值,这是一阶三角形单元的固有属性。从图6中还可以看出,经过合理的电磁设计,磁密已经完全透入实心转子,同时如图7所示,实心转子内部已经充分产生了感应涡流电密,这说明转子材料已经得到充分利用,产生了电磁转矩,这是高速实心转子感应电机的设计核心之一。

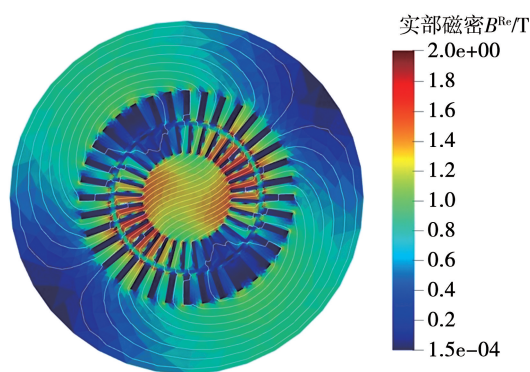


图6 额定工况下高速实心转子感应电机磁密分布
Fig. 6 Flux density distribution of high-speed solid-rotor induction machine at the nominal load

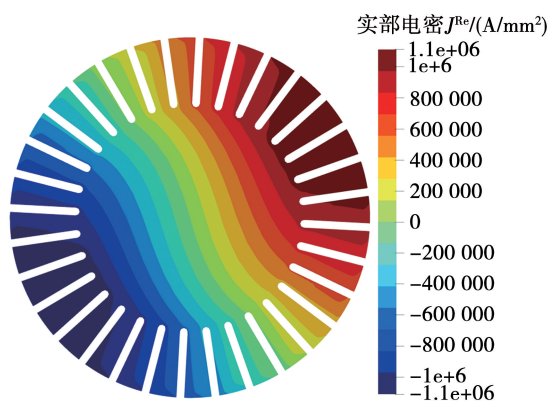


图7 额定工况下实心转子感应涡流分布
Fig. 7 Solid rotor eddy-current distribution at nominal load

采用场路耦合、考虑材料非线性的时谐场求解器,能够高效求解出高速实心转子感应电机在不同工况下的定子电流以及转子涡流损耗,其中定子电流可由式(20)直接解出,而转子涡流损耗可以根据图7中的转子感应涡流电密分布进一步处理得到,即

$$P_r = \int_{\Gamma} \frac{(J^{\text{Re}})^2 + (J^{\text{Im}})^2}{2\sigma} l d\Gamma. \quad (32)$$

式中 Γ 为积分所涉及的物理面域,对于上述转子感应涡流损耗求解即为实心转子面域。

时谐场下可采用麦克斯韦张量法对电磁转矩进行精确计算,其具体表达式^[23]为

$$T_e = \frac{l}{\mu_0} r^2 \int_0^{2\pi} B_r B_t d\theta. \quad (33)$$

式中: μ_0 为真空磁导率; r 为气隙半径; B_r 和 B_t 为气隙磁密的径向和切向分量的实部或者虚部; θ 为转

子位置角度。

依据式(18)、式(32)和式(33)可以计算出额定转矩 $800\text{ N}\cdot\text{m}$ 的工况下,不同 BH 曲线处理方式下的主要性能,详细性能指标如表 2 所示。可以看出,在输出相同的目标转矩下,采用不同的 BH 处理逻辑,所计算的电磁性能指标差异较大。其中,原始 BH 曲线计算所得的转差率最高,导致电流和转子涡流损耗最高;正弦 B - 等效 H 曲线计算的转差率次之,等效 B - 正弦 H 曲线计算的转差率最小。

表 2 高速实心转子感应电机不同 BH 曲线时谐场仿真性能指标对比

Table 2 Performance comparison of high-speed solid-rotor induction machine solved by time-harmonic solver with different BH curves

$B-H$ 曲线类型	转差率	电流/A	转子涡流损耗/kW
原始 $B-H$	0.004 7	2 026	4.73
正弦 B - 等效 H	0.004 2	1 789	4.22
等效 B - 正弦 H	0.003 9	1 634	3.92

图 8 显示了采用瞬态场求解的额定转矩 $800\text{ N}\cdot\text{m}$ 下三相电流波形曲线。该高速实心转子感应电机达到额定转矩稳态时的转速为 $11\,950\text{ r/min}$,转差率为 $0.004\,17$,与表 2 中时谐场正弦 B - 等效 H 所计算的转差率接近,与等效 B - 正弦 H 所计算的相差 6.47% ;图 8 中稳态电流基波幅值约为 $1\,626\text{ A}$,与表 2 中时谐场正弦 B - 等效 H 所计算的电流相差 10% ,与等效 B - 正弦 H 所计算的电流较为接近。在涡流损耗方面,瞬态场所计算的涡流损耗能够考虑谐波影响,在额定工况下的转子涡流损耗为 6.56 kW ,大约为表 2 中时谐场计算的涡流损耗的 1.5 倍。然而,瞬态场计算过程中会涉及电磁暂态,图 8 中瞬态场求解达到稳态共计 $18\,000$ 时步,仿真时长共计约 12 h ;而时谐场计算时长共计 4.3 s 。

由此可见,高精度时谐场快速计算在高速实心转子感应电机设计初期具有至关重要的作用,且在非线性时谐场计算过程中,对于非线性材料的 BH 曲线进行合适的正弦化处理能够有效提高计算精度。

图 9 显示了在时谐场下,结合 BH 曲线正弦化处理技术所快速求解的转矩转差曲线,可以看出,该高速实心转子感应电机具有大约 3 倍的过载能力,

最大转矩对应的临界转差约为 0.04 。为了进一步预测电机效率,需要进一步对铁耗进行计算,在时谐场下,定子铁耗可以由 Bertotti 模型预测:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{Fe}} &= \int_V (k_h f B_m^2 + k_w f^2 B_m^2 + k_e f^{1.5} B_m^{1.5}) dV; \\ B_m &= \sqrt{(B^{\text{Re}})^2 + (B^{\text{Im}})^2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

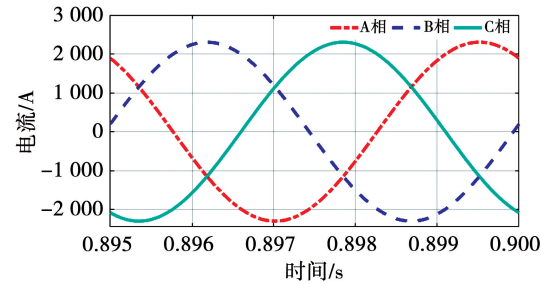


图 8 瞬态场求解的高速实心转子感应电机额定工况下定子电流随时间变化曲线

Fig. 8 Stator current waveforms as function of time of high-speed solid-rotor induction machine solved by transient solver at nominal load

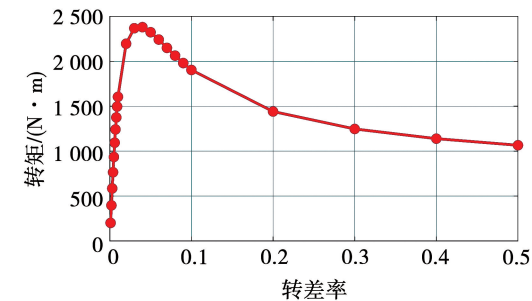


图 9 时谐场快速求解的高速实心转子感应电机转矩转差曲线

Fig. 9 Torque curve as function of slip of the high-speed solid-rotor induction machine solved by time harmonic solver

图 10 为在场路耦合时谐场下分别采用式(32)和式(34)所计算的高速实心转子感应电机定子铁耗和转子涡流损耗随转差变化曲线。可以看出,在高速实心转子感应电机中,转子损耗要比铁耗大得多。且与其他类型电机不同之处是,高速实心转子感应电机的铁耗随转差率增加而减少,这是因为转差率升高时,转子涡流急剧增加,导致转子效应增强(即同步电机中的电枢反应),从而致使电机整体磁场大小下降。

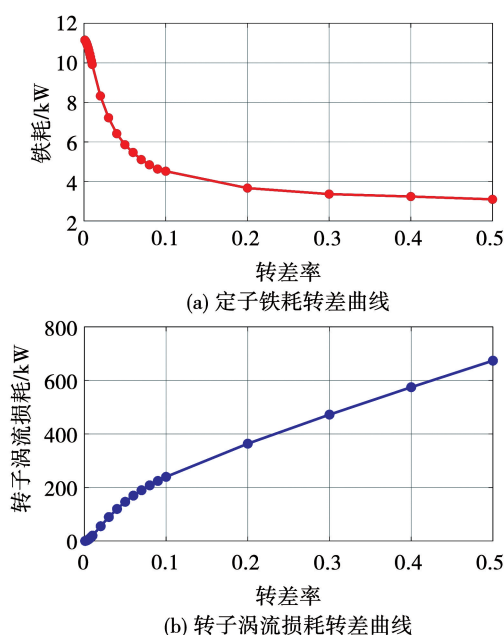


图 10 时谐场快速求解的高速实心转子感应电机定子铁耗和转子涡流随转差变化的曲线

Fig. 10 Stator core losses and rotor eddy-current losses waveforms as function of slip of high-speed solid-rotor induction machine solved by time harmonic solver

图 11 显示了最终求解的电机效率随转差率变化曲线,可以看出,该高速电机在转差为 0.003 至 0.01 区间内都具有不低于 0.98 的效率,且在 0.02 转差下,其效率仍然不低于 0.97,符合高速实心转子感应电机设计要求。

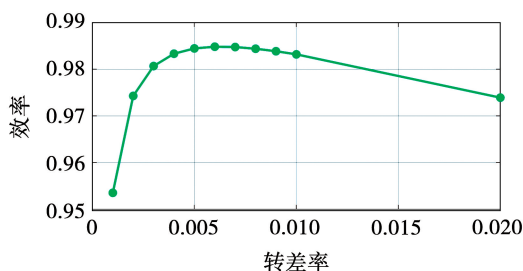


图 11 时谐场快速求解的高速实心转子感应电机效率随转差变化的曲线

Fig. 11 Efficiency as function of slip of high-speed solid-rotor induction machine solved by time harmonic solver

5 结 论

本文针对高速实心转子感应电机二维电磁场高

精度快速建模难题,提出并实现了一种创新的电磁场电路直接耦合的有限元方法。该方法基于时谐场求解框架,核心在于:通过将电磁场有限元方程和电路方程集成于同一个系统总体方程,实现电磁场与电路的直接耦合求解;应用能量等效原理对定转子非线性 BH 曲线进行正弦化矫正,显著提升计算精度;将频域复数方程组实数化和线性化,结合牛顿拉夫逊迭代法实现非线性问题的高效精确求解。据此开发专用求解程序库,通过其时谐场仿真结果与高精度瞬态场仿真结果的对比,验证了所提出的场路耦合时谐场有限元方法及其程序库在高速实心转子感应电机稳态电磁性能计算中的准确性与可靠性。本工作为开发时谐场加速的瞬态场求解器奠定了基础,有力推动了高速实心转子感应电机电磁性能的高效高精度计算。

参 考 文 献:

- [1] 许浩,赵镜红,熊义勇,等. 五相实心转子感应电机磁场及参数计算[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2025, 53(1): 28.
- XU Hao, ZHAO Jinghong, XIONG Yiyong, et al. Calculation of magnetic field and parameters of five phase solid rotor induction motor[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2025, 53(1): 28.
- [2] 崔旭,司纪凯,封海潮,等. 大小极环绕组实心转子感应电机工作机理及电磁特性分析[J]. 电工技术学报, 2019, 34(9): 1850.
- CUI Xu, SI Jikai, FENG Haichao, et al. Operating principle and electromagnetic characteristic analysis for large-small pole solid-rotor induction motor with toroidal windings[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2019, 34(9): 1850.
- [3] GERADA D, MEBARKI A, BROWN N L, et al. High-speed electrical machines: technologies, trends, and developments[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(6): 2946.
- [4] PYRHONEN J, NERG J, KURRONEN P, et al. High-speed high-output solid-rotor induction-motor technology for gas compression[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 57(1): 272.
- [5] DI C, PETROV I, PYRHÖNEN J J. Modeling and mitigation of rotor eddy-current losses in high-speed solid-rotor induction machines by a virtual permanent magnet harmonic machine[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2018, 54(12): 1.
- [6] 王斯博,孙明冲,龚海桂,等. 车用高速永磁同步电机低交流损耗定子绕组优化[J]. 电机与控制学报, 2025, 29(1): 25.
- WANG Sibao, SUN Mingchong, GONG Haigui, et al. Optimization of low AC loss stator winding for high-speed permanent magnet

- synchronous motor for automotive applications [J]. *Electric Machines and Control*, 2025, 29(1): 25.
- [7] DI C, BAO X, JIANG W. Performance prediction of a ferrite-assisted synchronous reluctance machine considering different control strategies using open-source finite element analysis [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2023, 59(11): 1.
- [8] 边旭, 边宏远, 梁艳萍. 基于磁网络法的外转子永磁同步电机的磁场分析[J]. *电机与控制学报*, 2025, 29(2): 96.
- BIAN Xu, BIAN Hongyuan, LIANG Yanping. Magnetic field analysis of external rotor permanent magnet synchronous motor based on magnetic circuit network [J]. *Electric Machines and Control*, 2025, 29(2): 96.
- [9] 张守首, 郭思源. 基于子域分析模型的实心转子感应电机磁场解析[J]. *电工技术学报*, 2021, 36(20): 4285.
- ZHANG Shoushou, GUO Siyuan. Analytical solution of magnetic field in solid rotor induction machine based on subdomain model [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2021, 36(20): 4285.
- [10] 郑印钊, 周理兵, 王晋. 考虑实心体涡流影响的笼型实心转子电机启动工况条电流分布的解析计算[J]. *电工技术学报*, 2021, 36(11): 2355.
- ZHENG Yinzhao, ZHOU Libing, WANG Jin. Analytical calculation of rotor bar current distribution in starting condition of cage solid-rotor machine considering the effect of eddy current in solid-rotor [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2021, 36(11): 2355.
- [11] 朱利伟, 邓智泉. 考虑材料非线性覆铜实心转子感应电机转子阻抗参数的二维解析计算[J]. *电工技术学报*, 2024, 39(24): 7688.
- ZHU Liwei, DENG Zhiquan. 2D analytic calculation of rotor-impedance parameters in copper-coated solid rotor induction motors considering the nonlinear material [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2024, 39(24): 7688.
- [12] 戈宝军, 魏瑶, 韩继超, 等. 开关磁阻电机定子铁损分布的时步有限元分析[J]. *电机与控制学报*, 2020, 24(7): 20.
- GE Baojun, WEI Yao, HAN Jichao, et al. Time-finite element analysis of stator iron loss distribution in switched reluctance motors [J]. *Electric Machines and Control*, 2020, 24(7): 20.
- [13] GARBIEC T, JAGIELA M, KULIK M. Application of nonlinear complex polyharmonic finite-element models of high-speed solid-rotor induction motors [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2020, 56(4): 1.
- [14] JASTRZEBSKI R P, PILAT A K. Analysis of unbalanced magnetic pull of a solid rotor induction motor in a waste heat recovery generator [J]. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2022, 38(2): 1208.
- [15] LIN D, ZHOU P, CHEN N, et al. Fast methods for reaching AC steady state in FE transient analysis [C]// 2017 IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC), May 21–24, 2017, Miami, FL, USA. 2017: 1–6.
- [16] DYCK D N, WEICKER P J. Periodic steady-state solution of voltage-driven magnetic devices [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, 43(4): 1533.
- [17] DI C, PETROV I, PYRHÖNEN J J, et al. Accelerating the time-stepping finite-element analysis of induction machines in transient-magnetic solutions [J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 122251.
- [18] LIU J, DI C, BAO X. Acceleration of the steady-state computation of dry submersible induction machines in the time-stepping finite element analysis [C]// 2023 26th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), November 5–8, 2023, Zhuhai, China. 2023: 1390–1395.
- [19] PAQUAY Y, BRÜLS O, GEUZAIN C. Nonlinear interpolation on manifold of reduced-order models in magnetodynamic problems [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, 52(3): 1.
- [20] 朱洒, 施斌, 周文亮, 等. 二维电磁场—路耦合仿真软件的开发与应用 [J]. *高压电器*, 2021, 57(4): 125.
- ZHU Sa, SHI Bin, ZHOU Wenliang, et al. Development and application of 2D coupled electromagnetic field-circuit simulation software [J]. *High Voltage Apparatus*, 2021, 57(4): 125.
- [21] ISLAM M J, ARKKIO A. Time-stepping finite-element analysis of eddy currents in the form-wound stator winding of a cage induction motor supplied from a sinusoidal voltage source [J]. *IET Electric Power Applications*, 2008, 2(4): 256.
- [22] LI Y, FENG Y, HUANG S, et al. An acceleration method for AC steady state performance of dual three-phase machine: modeling and implementation [C]// 2021 13th International Symposium on Linear Drives for Industry Applications (LDIA), July 1–3, 2021, Wuhan, China. 2021: 1–6.
- [23] 郭保成, 黄允凯, 彭飞, 等. Halbach 阵列盘式永磁电机的解析计算 [J]. *中国电机工程学报*, 2019, 39(1): 289.
- GUO Baocheng, HUANG Yunkai, PENG Fei, et al. An analytical model for axial flux permanent magnet machines with Halbach array [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2019, 39(1): 289.

(编辑:邱赫男)